

## SESIÓN 10: MODELO INSUMO PRODUCTO

### Introducción

Fue introducido por primera vez a finales de los años treinta por [Wassily Leontief](#), ganador del Premio Nóbel 1973, en un estudio de la economía de los EEUU.

Este modelo incorpora las interacciones entre las diversas industrias o sectores que integran la economía. El objetivo del modelo es permitir a los economistas predecir los niveles de producción futuros de cada industria a fin de satisfacer las demandas futuras para diversos productos.

Tal predicción se complica porque un cambio en la demanda de un producto de una industria puede modificar los niveles de producción de otras industrias (el modelo permite el análisis de los cambios estructurales de la economía).

La matriz insumo-producto es un registro ordenado de las transacciones entre los sectores productivos orientadas a la satisfacción de bienes para la demanda final y bienes intermedios que se compran y venden entre sí. Esta matriz ilustra las interacciones entre los sectores y permite cuantificar el incremento de la producción de todos los sectores, derivado del aumento de uno de ellos en particular.

### Ejemplo:

A fin de describir el modelo de manera sencilla y siguiendo a Arya y Lardner (1992), consideremos una economía que conste sólo de dos industrias, P y Q. Las interacciones de estas industrias se dan en la Tabla 1.

Se supone en el modelo que todo lo que se produce se consume, es decir, la producción de cada industria debe ser igual a la suma de todos los insumos (medidos en las mismas unidades). Así la producción total de P debe ser 200

unidades y de 160 para Q (como aparece en la última fila y última columna de la tabla 1).

	Insumos de P	Insumos de Q	Demandas finales	Producción total
Producción de P	60	64	76	200
Producción de Q	100	48	12	160
Insumos totales	200	160		

Tabla 1

En la dos primeras filas de la tabla 1 se observa como se utilizan los productos de cada industria: de las 200 unidades producidas por P, 60 las utiliza ella misma y 64 las utiliza Q, quedando 76 unidades disponibles para la demanda final (bienes no utilizados por la propia industria). De manera similar, de las 160 unidades producidas por Q, 100 las utiliza P, 48 las utiliza ella misma y 12 se destinan a la demanda final.

Supongamos que una investigación de mercado predice que en 5 años, la demanda final para P decrecerá de 76 a 70 unidades, mientras que la de Q, crecerá de 12 a 60 unidades. ¿Qué tanto debería cada industria ajustar su nivel de producción a fin de satisfacer estas demandas finales proyectadas?

Las dos industrias no operan independientemente una de otra, por lo tanto la producción de una está ligada a la producción de la otra. Supongamos que a fin de satisfacer las demandas finales proyectadas a 5 años, P debe producir  $x_1$  unidades y Q debe producir  $x_2$  unidades.

De la tabla1, observamos que: La industria P requiere la utilización de  $(60/200)x_1$  unidades de su propio producto y  $(100/200)x_1$  unidades del producto de Q, para producir  $x_1$  unidades. En forma análoga, Q debería usar  $(64/160)x_2$  unidades del producto de P y  $(48/160)x_2$  unidades de su propio producto.

Sabemos que:

Producción total = Udes consumidas por P + Udes consumidas por Q + Demanda final

Como la nueva demanda final para P es 70, la producción total de P será:

$$x_1 = \frac{60}{200}x_1 + \frac{64}{160}x_2 + 70 \quad (1)$$

De manera similar, la producción total de Q será:

$$x_2 = \frac{100}{200}x_1 + \frac{48}{160}x_2 + 60 \quad (2)$$

Escribimos las ecuaciones (1) y (2), en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60/200 & 64/160 \\ 100/200 & 48/160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$$

Donde,

**X:** matriz de Producción

**A:** Matriz Insumo-Producto

**D:** Matriz de Demanda

Y además;

$a_{11}$ insumos de P producidos por P	$a_{12}$ insumos de Q producidos por P
$a_{21}$ insumos de P producidos por Q	$a_{22}$ insumos de Q producidos por Q

La primera columna de la matriz insumo-producto, A, corresponde a proporciones de los insumos de P que provienen de las industrias P y Q. Por ejemplo, para las entradas  $a_{11} = 60/200$  y  $a_{21} = 100/200$  decimos que de las 200 unidades de insumos totales de P, 60 provienen de la misma industria P y 100 provienen de la industria Q.

En general,  $a_{ij}$  representa la parte fraccionaria de los insumos de la industria j que son producidos por la industria i.

#### Observación:

1. Cada elemento de A está entre 0 y 1 y la suma de los elementos de cualquier columna nunca es mayor que 1.

2. La ecuación  $X = AX + D$ , se conoce como ecuación insumo-producto.

Siguiendo con el ejemplo, deseamos hallar la matriz de producción  $X$  que cumplirá con las demandas finales proyectadas, debemos resolver la ecuación insumo-producto, esto es:

$$X = AX + D$$

$$X - AX = D$$

$$(I - A)X = D$$

Si  $(I - A)^{-1}$  existe, entonces

$$X = (I - A)^{-1}D$$

**Observación:**

Podemos hallar a  $(I - A)^{-1}$  con los métodos de inversión de matrices estudiados en las Sesiones 7 y 9.

En nuestro ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow I - A = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.4 \\ -0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $(I - A)^{-1}$  por el método de eliminación gaussiana y obtenemos:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 70 & 40 \\ 50 & 70 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$X = (I - A)^{-1}D = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 70 & 40 \\ 50 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7300/29 \\ 7700/29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 251.7 \\ 265.5 \end{pmatrix}$$

Así, la industria P debe producir 251.7 unidades y Q debería producir 265.5 unidades de su producto, con el fin de satisfacer las demandas finales proyectadas a 5 años.

## RESUMEN

- ① El modelo de Leontief permite una representación holística del sistema económico; es un instrumento operativo de la teoría del equilibrio general; es un enlace entre la micro y macro economía y ofrece múltiples posibilidades de uso práctico en el análisis económico, formulación de políticas y realización de pronósticos.
- ① El modelo insumo-producto de Leontief se compone de tres elementos básicos: La tabla de transacciones intersectoriales, la matriz insumo-producto A y la matriz de requerimientos directos e indirectos,  $(I - A)^{-1}$ .

## EJERCICIOS RESUELTOS

La tabla 2 muestra la producción entre dos industrias P y Q que integran una economía hipotética.

	Insumo de P	Insumo de Q	Demandas finales	Producción total
<b>Industria P</b>	60	75	65	200
<b>Industria Q</b>	80	30	40	150
<b>Mano de obra</b>	60	45		
<b>Insumos totales</b>	200	150		

Tabla 2

- a. Encuentre la matriz insumo-producto, A.

La matriz de Leontief o matriz insumo-producto, se obtiene dividiendo cada una de las entradas resaltadas en azul por su correspondiente producción total, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} 60/200 & 75/150 \\ 80/200 & 30/150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- b. Determine la matriz de producción si las demandas finales cambian a 104 en el caso de P y a 172 para Q.

Siendo  $I_{2 \times 2}$  la matriz identidad de orden 2, se sigue que:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.5 \\ -0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Usando el método de eliminación gaussiana (Sesión 9) o el método de los cofactores (Sesión 7), podemos hallar:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.21 & 1.36 \\ 1.1 & 1.92 \end{pmatrix}$$

Si  $D$  representa al nuevo vector de Demanda, tenemos:

$$D = \begin{pmatrix} 104 \\ 172 \end{pmatrix}$$

Así,

$$X = (I - A)^{-1} D = \begin{pmatrix} 2.8 & 1.4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 104 \\ 172 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532 \\ 448 \end{pmatrix}$$

La industria P debe producir 532 unidades y la industria Q debe producir 448 unidades de su producto, a fin de satisfacer las nuevas demandas finales.

- c. ¿Cuáles son los nuevos requerimientos de mano de obra?

La industria P, debe producir 60 unidades de mano de obra para generar una producción total de 200 unidades. Entonces los insumos primarios son  $60/200=0.3$  de la producción total.

Así, 0.3 de la nueva producción (532), da los nuevos requerimientos de mano de obra de la industria P, esto es:  $0.3 \times 532 = 159.6 \approx 160$  unidades.

Análogamente, los nuevos requerimientos de mano de obra de la industria Q son:  $(45/150) \times 448 = 134.4 \approx 135$ .

Luego, los nuevos requerimientos de mano de obra para P son de 160 unidades y los de Q son 135 unidades.